数理解析研究所講究録
81巻 1970年 99-125

多値論理における置換と束演算について

島田良作　（徳島大学工学部）

あらまし．　一般にn個の真理値（n値）のすべての置換と，n値の可能なすべての順序によって定義されるすべての束演算の重要な諸性質を明らかにし，これらによる多値論理回路の一設計法を提案する．置換と束演算からなるこの多値論理系は，そのn値をn線上の信号の有無であらわす多線回路方式によく適合し，もっとも実際的な多値論理系の一つであると考えられる．すなわち，置換はすべて線の入れ換えだけでおこなわれ，束演算は既存の半導体回路で容易に，しかもすべてただ一種類の回路で実現される．束演算の重要な性質としてとくに吸收律と分配律についてやや詳細に検討し，束演算の置換と置換の置換から，2値論理における双対定理に相当する置換定理をみちびく．これらの置換と束演算を用いてまず一致関数を構成し，これらを組み合せて多値論理関数の標準展開式をみちびく．これらの標準項からできる限り多くの文字を除き，えられる主項から必要最少限の主項をえらぶことによって多値論理関数の簡単化をおこなう．実際，多値多変数の論理関数の最簡構成をえるにはいちじるしい手

数を要するが，ここではその手数と，えられる関数構成の簡単さの一妥協点を与えている．

1．まえがき

多値論理に関する研究は多数あり，２値論理における論理積と論理和の概念をそのまま多値に適用した系がもっとも古く，[(1)～(4)] その他１演算子のみで完全系をなす多値論理演算子の研究，[(5)～(7)] 多値閾値論理系の研究，[(8)～(11)] 多値論理全般に関する基本的な諸研究[(12)～(14)]などがある．ここにのべる多値論理系は（１）～（４）などと同類であるが，すべての置換とすべての束演算を取り扱っている点で異っている．３値の場合，すでにこのような系は著者らによって発表されているが，[(15)] ここにのべるのはその一般多値への拡張である．

多値論理回路を実現するもっとも実際的な方法の一つは，その n 値を n 線上の信号の有無であらわす方法である．この場合，信号のある線によって各値が指定され，したがって $n!$ 個のすべての置換は線の入れ換えだけでおこなわれる．このような方法は２値および３値論理においてすでに提案されている．[(16)～(20)] また，束演算は既存の半導体回路で容易に実現され，しかも以下で明らかにされるようにただ一種類の回路が任意の束演算の働きをする．したがって，素演算として置換

および束演算の数を制限する必要はなく，任意の置換と束演算を自由に使用することができ，しかも任意の多値組み合せ論理回路がただ一種類の基本回路で実現されることになる．このような意味においても，置換と束演算からなるこの論理系は重要な多値論理系の一つであると考えられる．

多値論理関数の一般的な構成法として，まず置換と束演算を用いて各変数のいわゆる一致関数を構成し，これらと定数を束演算で結合して標準展開式をみちびく．とくに多値多変数の場合にはいたって多くの展開が可能である．3値および多値論理関数の簡単化についてはすでに二、三の方法が発表されているが，[21][22] 置換を用いた論理系における簡単化の方法はいまだ知られていないようである．ここにのべる方法は束演算の選択，冗長項の除去，残された項の可能なすべての形の列挙、冗長文字の除去，および主項の選択からなり，最後の主項の選択にあたっては2値論理関数に対する手法[23]が用いられる．任意の置換と任意の束演算の自由な使用を許すことはこの簡単化の手数を増加させることになるが，それだけより簡単化できることになると考えられる．

2．真理値の置換（置換演算）と束演算

一般に n 個の真理値（n 値）を t_1，t_2，…，t_n とし，これ

らの集合をTとする．集合TからTへの1対1の写像は集合Tの置換である．これら置換は$n!$個あって，それぞれをP_1，P_2，…，$P_{n!}$とあらわし，これらの集合をPとする．一般に置換P_i（i = 1，2，…，$n!$）を

$$\left.\begin{aligned} &P_i = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_{i_1} & t_{i_2} & \cdots & t_{i_n} \end{pmatrix}, \\ &\qquad t_{i_j}\ (j=1,2,\cdots,n) \in T,\quad t_{i_j} \neq t_{i_k}\ (j \neq k). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

のようにあらわす．とくに$t_{i_j} = t_j$（j = 1，2，…，n）である置換は恒等置換であり，これをP_1とする．

Tを値域とするn値論理変数xに置換P_iをほどこしたものをx^{P_i}とあらわし，2重に置換をほどこしたもの$(x^{P_i})^{P_j}$を$x^{P_i \cdot P_j}$とあらわす．このような2重置換も集合TからTへの1対1の写像であるから，一般に$x^{P_i \cdot P_j} = x^{P_k}$となる置換$P_k$が存在し，これから置換の積$P_i \cdot P_j = P_k$が定義される．このとき，集合Pは$P_1$を単位元とする群（$n$次対称群）である．とくに$P_i \cdot P_j = P_j \cdot P_i = P_1$である2つの置換$P_i$と$P_j$はたがいに逆置換であるといわれ，$P_i = P_j^{-1}$，$P_j = P_i^{-1}$とあらわす．$n$ = 2の2値の場合，PはP_1とP_2のみからなり

$$\left.\begin{aligned} &x^{P_1} = x, \quad x^{P_2} = \mathrm{NOT}(x), \\ &P_1^{-1} = P_1, \quad P_2^{-1} = P_2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

であって，この場合置換の積は可換であるが，一般に$n \geq 3$

では非可換である．

集合Tに順序を与えるしかたは $n!$ とおりあり，これらを r_1，r_2，…，$r_{n!}$ とする．一般に順序 r_i（$i=1$，2，…，$n!$）を

$$\left.\begin{aligned} r_i &= \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle, \\ t_{i_j} &= t_j^{p_i} \quad (j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

のようにあらわすことにする．また，順序 r_i において値 t_{i_j} が t_{i_k} に先行することを $t_{i_j} <_i t_{i_k}$ とあらわす．

Tの各順序 r_i（$i=1$，2，…，$n!$）に対応して，n 値論理変数 x，y 間の演算 $\wedge_i$（$i=1$，2，…，$n!$）を

$$x \wedge_i y = \begin{cases} x & (x \leqq_i y \text{ の場合}) \\ y & (\text{その他の場合}). \end{cases} \tag{4}$$

で定義する．ここに $x \leqq_i y$ は $x <_i y$ または $x=y$ であることをあらわす．いま $r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$ とするとき，$x \wedge_i y$ の真理値表は表1で与えられる．ここではこれら $n!$ 個の演算を束演算ということにし，その集合をLとする．これらの束演算がべき等律，交換律，および結合律

$$\left.\begin{aligned} &x \wedge_i x = x, \\ &x \wedge_i y = y \wedge_i x, \\ &x \wedge_i (y \wedge_i z) = (x \wedge_i y) \wedge_i z, \\ &\qquad (i=1,2,\cdots,n!) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

をみたすことはその定義から明らかである．この結合律から，束演算を多変数間の演算に拡張することができ，一般に m 変数の $\wedge_i$ による結合を $\bigwedge_{j=1}^{m} {}_i\, x_j$ のようにあらわすことにする．また，$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$ とするとき

表 1．$x \wedge_i y$ の真理値表

$x \backslash y$	t_{i_1}	t_{i_2}	……	$t_{i_{n-1}}$	t_{i_n}
t_{i_1}	t_{i_1}	t_{i_1}	……	t_{i_1}	t_{i_1}
t_{i_2}	t_{i_1}	t_{i_2}	……	t_{i_2}	t_{i_2}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
$t_{i_{n-1}}$	t_{i_1}	t_{i_2}	……	$t_{i_{n-1}}$	$t_{i_{n-1}}$
t_{i_n}	t_{i_1}	t_{i_2}	……	$t_{i_{n-1}}$	t_{i_n}

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge_i t_{i_1} = t_{i_1}\,, \\ x \wedge_i t_{i_n} = x\,, \\ x \wedge_i t_{i_j} \leqq_i t_{i_j}\,, \ (j = 1, 2, \cdots, n). \end{array}\right\} \qquad (6)$$

であることは明らかである．とくに $n = 2$ の場合，ここに定義される束演算は２個で，それぞれ２値論理における論理積と論理和にほかならない．

n 値 m 次元ベクトル $\mathbf{t}_j = (t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_m})$，$t_{j_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, m) \in T$，の集合を T^m とすると，n 値 m 変数論理関数は T^m から T の部分集合への一意の写像である．いま，f および g をそれぞれ n 値 m 変数論理関数として，T^m のすべての元に対して $f(\mathbf{t}_j) \leqq_i g(\mathbf{t}_j)$，$(j = 1, 2, \cdots, n^m)$ であるとき，r_i において f は g に先行するといい，$f(\mathbf{x}) \leqq_i g(\mathbf{x})$，あるいは単に $f \leqq_i g$ とあらわすことにする．こ

こに，xはn値m次元ベクトル変数をあらわす．また$f \leqq_i g$のとき

$$f(x) \wedge_i g(x) = f(x), \quad (f \leqq_i g). \tag{7}$$

である．

多線式の場合，n値論理信号xをn本の線$l_x^1, l_x^2, \cdots, l_x^n$上の信号の有無であらわす．信号のある線を1本に限り，線l_x^i上の信号によってxの値がt_iであることをあらわすものとする．このとき，束演算$\wedge_1$をおこなう回路は，たとえばNOR回路を用いて図1のようにつくることができる．このような$\wedge_1$の回路は，図からもわかるように，入出力線をそれぞれP_i^{-1}およびP_iに応じて入れ換えることにより$\wedge_i$の回路になる．したがって，置換と束演算を用いた多値組み合せ論理回路はすべて一種類の束演算回路で実現されることになる．このことはまた後に明確に示される．

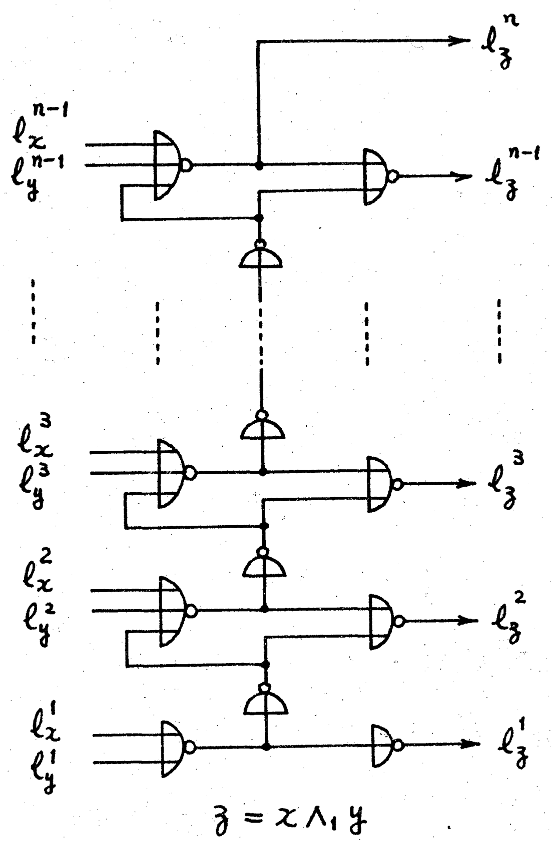

図1. 束演算回路の例

3．吸収律と分配律

n値論理変数x，y，zの，$y \leqq_i z$である任意の値に対して$(x \wedge_i y) \wedge_j z = z$をみたす$\wedge_i$と$\wedge_j$について考える．いま$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_k}, t_{i_{k+1}}, \cdots, t_{i_n} \rangle$とし，$y$がある値$t_{i_k}$であるとすると，式（6）によって$(x \wedge_i y) \leqq_i t_{i_k}$であり，$y \leqq_i z$によって$t_{i_k} \leqq_i z$である．したがって，この場合$(x \wedge_i y) \wedge_j z = z$が成立するためには，$t_{i_k}, t_{i_{k+1}}, \cdots, t_{i_n} \leqq_j t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_k}$でなければならない．そこで$k = 1, 2, \cdots, n$のすべての場合を考えるとつぎの定理をえる．

定理1．n値論理変数x，y，zの，$y \leqq_i z$である任意の値に対して

$$(x \wedge_i y) \wedge_j z = z, \quad (y \leqq_i z). \tag{8}$$

が成立するための必要十分条件は，$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$であるとき，$r_j = \langle t_{i_n}, \cdots, t_{i_2}, t_{i_1} \rangle$であることである．

このとき，$\wedge_j$をとくに$\vee_i$と書くことにする．$\wedge_j = \vee_i$としてとくに$y = z$のとき，式（8）はいわゆる吸収律になる．この吸収律が$\wedge_i$と$\vee_i$を交換しても成立することは上の定理から明らかである．すなわち

系1．1．n値論理変数x，yの任意の値に対して吸収律

$$(x \wedge_i y) \vee_i y = y, \quad (i = 1, 2, \cdots, n!). \tag{9}$$

が成立する．

条件$\wedge_j = \vee_i$が，xとyの任意の値に対して$(x \wedge_i y) \wedge_j y = y$をみたすための必要条件であることも同様にして示される．ここでは集合Lのすべての$\wedge_i$を束演算といっているが，ほんらい$\{T, \wedge_i, \vee_i, \leqq_i\}$が束をつくっているのである．

つぎに，n値論理変数x，y，zの任意の値に対して

$$x \wedge_i (y \wedge_j z) = (x \wedge_i y) \wedge_j (x \wedge_i z), \text{（分配律）}. \qquad (10)$$

をみたす$\wedge_i$と$\wedge_j$について考える．$x \leqq_i y, z$であるか，$y, z \leqq_i x$であれば，あきらかに任意の$\wedge_j$に対して式（10）が成立する．$y <_i x <_i z$の場合，式（10）の右辺は$y \wedge_j x$になる．したがって，この場合式（10）が成立するためには，$x <_j y$であれば同時に$z <_j y$であり，$y <_j x$であれば同時に$y <_j z$でなければならない．$z <_i x <_i y$の場合も同様であり，逆はあきらかである．したがって

定理2．n値論理変数x，y，zの任意の値に対して，分配律式（10）が成立するための必要十分条件は，$r_i = < t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} >$とするとき，すべての$k = 1, 2, \cdots, n-1$に対して

$$\left.\begin{array}{l} t_{i_k} <_j t_{i_{k+1}}, \cdots, t_{i_n}, \\ \text{or} \quad t_{i_{k+1}}, \cdots, t_{i_n} <_j t_{i_k}. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

であることである．

したがって，値$t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_{n-1}}$はそれぞれ$r_j$において2

個の位置が許され，1つの$\wedge_i$に対して条件式（10）をみたす$\wedge_j$は2^{n-1}個存在し，このなかに$\wedge_i$自体，および$\vee_i$が含まれる．また，特別の場合として

系2．1．$x \leqq_i y$，zであるか，y，$z \leqq_i x$であれば，任意の$\wedge_j$に対して分配律式（10）が成立する．

x，y，zの任意の値に対して，式（10）と同時に$\wedge_i$と$\wedge_j$を交換した分配律

$$x \wedge_j (y \wedge_i z) = (x \wedge_j y) \wedge_i (x \wedge_j z), \qquad (12)$$

をみたすための条件を考える．$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$，$r_j = \langle t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_n} \rangle$とすると，まず式（10）が成立するために$t_{i_1} = t_{j_1}$であるか，$t_{i_1} = t_{j_n}$でなければならない．$t_{i_1} = t_{j_n}$であるとすると式（12）が成立するために$t_{j_1} = t_{i_n}$でなければならない．以下同様にして，はじめに$t_{i_1} = t_{j_n}$とすると$r_i$と$r_j$は逆の順序でなければならないことになる．また，はじめに$t_{i_1} = t_{j_1}$とすると，$t_{i_2} = t_{j_2}$であるか，$t_{i_2} = t_{j_n}$でなければならない．後者の場合，以後$t_{i_3} = t_{j_{n-1}}$，$t_{i_4} = t_{j_{n-2}}$，$\cdots$，$t_{i_n} = t_{j_2}$に限られる．以下同様にして

系2．2．n値論理変数x，y，zの任意の値に対して，分配律式（10）と（12）が同時に成立するための必要十分条件は，$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$，$r_j = \langle t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_n} \rangle$とするとき，$l = 1, 2, \cdots, n$のどれか1つに対して

$$\left.\begin{array}{l} t_{i_k} = t_{j_k} \ (k < l) \\ \text{and} \quad t_{i_k} = t_{j_{n+l-k}} \ (k \geq l). \end{array}\right\} \qquad (13)$$

であることである.

一つの$\wedge_i$に対して，これら両分配律を同時にみたす$\wedge_j$はn個存在し，このなかに$\wedge_i$自体，および$\vee_i$が含まれる．また，$\{T, \wedge_i, \vee_i, \leqq_i\}$は分配束である.

4．束演算の置換と置換の置換，置換定理

置換p_j（$j = 1, 2, \cdots, n!$）を用いた，集合Tの順序$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$，（$i = 1, 2, \cdots, n!$）から順序$\langle t_{i_1}^{p_j}, t_{i_2}^{p_j}, \cdots, t_{i_n}^{p_j} \rangle$への変換をTの順序の置換といい

$$r_i^{p_j} = \langle t_{i_1}^{p_j}, t_{i_2}^{p_j}, \cdots, t_{i_n}^{p_j} \rangle \qquad (14)$$

とあらわす．また，$r_i^{p_j}$で定義される束演算を$\wedge_i^{p_j}$とあらわし，このような$\wedge_i$から$\wedge_i^{p_j}$への変換を束演算の置換ということにする．このとき

$$\left.\begin{array}{l} r_i = r_1^{p_i}, \quad \wedge_i = \wedge_1^{p_i}, \ (i = 1, 2, \cdots, n!), \\ \left.\begin{array}{l} r_i^{p_j} \neq r_k^{p_j}, \ \wedge_i^{p_j} \neq \wedge_k^{p_j}, \\ r_j^{p_i} \neq r_j^{p_k}, \ \wedge_j^{p_i} \neq \wedge_j^{p_k}, \end{array}\right\} (i \neq k), \end{array}\right\} \qquad (15)$$

であることはあきらかである．また，置換の積の定義により

$$\left.\begin{array}{l} (r_i^{p_j})^{p_k} = r_i^{p_j \cdot p_k}, \ (\wedge_i^{p_j})^{p_k} = \wedge_i^{p_j \cdot p_k}, \\ \qquad (i, j, k = 1, 2, \cdots, n!). \end{array}\right\} \qquad (16)$$

とすることができる．

いま $r_k = r_i^{p_j}$ とすると，$x \leqq_i y$ であれば上の定義により，$x^{p_j} \leqq_k y^{p_j}$ である．したがって，このとき $(x \wedge_i y)^{p_j} = x^{p_j}$ であると同時に，$x^{p_j} \wedge_k y^{p_j} = x^{p_j}$ である．ここに $\wedge_k = \wedge_i^{p_j}$ であるから

定理 3．n 値論理変数 x，y の任意の値に対して

$$\left.\begin{aligned} &(x \wedge_i y)^{p_j} = x^{p_j} \wedge_i^{p_j} y^{p_j}, \\ &\qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n!). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

が成立する．

とくに $n=2$ の場合，これは De Morgan の定理になる．

上の関係を多変数，多束演算の場合に順次適用すると

系 3．1．任意の束演算を有限回用いてつくられる任意の関数 $f(x_1, x_2, \cdots ; \wedge_{i_1}, \wedge_{i_2}, \cdots)$ に対して

$$\left.\begin{aligned} &f^{p_j}(x_1, x_2, \cdots ; \wedge_{i_1}, \wedge_{i_2}, \cdots) \\ &\quad = f(x_1^{p_j}, x_2^{p_j}, \cdots ; \wedge_{i_1}^{p_j}, \wedge_{i_2}^{p_j}, \cdots), \\ &\qquad (j = 1, 2, \cdots, n!). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

が成立する．

したがって，このような関数は，適当な置換を用いてその束演算を任意にかえることができ，さらに，このような関数をただ一種類の束演算と適当な置換を用いてあらわすことができる．たとえば，$x \wedge_i y$ に置換 $p_1 = p_i^{-1} \cdot p_i$ をほどこすと

$$x \wedge_i y = (x^{p_i^{-1}} \wedge_1 y^{p_i^{-1}})^{p_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n!). \tag{19}$$

となる．これは，多線式回路において置換が線の入れ換えだけでおこなわれるとき，すべての束演算回路が$\wedge_1$の回路に帰着されることを示している．

つぎに，置換の共役変換$p_j^{-1} \cdot p_i \cdot p_j$をここでは置換の置換といい，

$$p_i^{p_j} = p_j^{-1} \cdot p_i \cdot p_j, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n!). \tag{20}$$

のようにあらわすことにする．このとき

$$\left.\begin{array}{l} p_1^{p_j} = p_1, \quad p_j^{p_1} = p_j^{p_j} = p_j, \quad (j = 1, 2, \cdots, n!). \\ p_i^{p_k} \neq p_j^{p_k}, \quad (i \neq j), \\ (p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \cdots \cdot p_{i_k})^{p_j} = p_{i_1}^{p_j} \cdot p_{i_2}^{p_j} \cdot \cdots \cdot p_{i_k}^{p_j}, \\ \qquad (i_1, i_2, \cdots, i_k, j = 1, 2, \cdots, n!). \end{array}\right\} \tag{21}$$

は明らかである．また，一般に$(p_j \cdot p_k)^{-1} = p_k^{-1} \cdot p_j^{-1}$であるから

$$\left.\begin{aligned} (p_i^{p_j})^{p_k} &= p_k^{-1} \cdot (p_j^{-1} \cdot p_i \cdot p_j) \cdot p_k \\ &= (p_j \cdot p_k)^{-1} \cdot p_i \cdot (p_j \cdot p_k) \\ &= p_i^{p_j \cdot p_k}, \\ &\qquad (i, j, k = 1, 2, \cdots, n!). \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

とすることができる．

ここで，たとえば

$$(x^{p_k} \wedge_i y^{p_l})^{p_j} = x^{p_k \cdot p_j} \wedge_i^{p_j} y^{p_l \cdot p_j}$$
$$= (x^{p_j})^{p_k^{p_j}} \wedge_i^{p_j} (y^{p_j})^{p_l^{p_j}}, \qquad (23)$$

のように，束演算の置換と置換の置換を順次適用することによりつぎの定理をえる．

定理4．（置換定理）．任意の置換と任意の束演算を用いてつくられる任意のn値論理関数$f(x_1, x_2, \cdots; p_{k1}, p_{k2}, \cdots; \wedge_{i_1}, \wedge_{i_2}, \cdots)$に対して

$$\left.\begin{aligned} & f^{p_j}(x_1, x_2, \cdots; p_{k1}, p_{k2}, \cdots; \wedge_{i_1}, \wedge_{i_2}, \cdots) \\ & \quad = f(x_1^{p_j}, x_2^{p_j}, \cdots; p_{k1}^{p_j}, p_{k2}^{p_j}, \cdots; \wedge_{i_1}^{p_j}, \wedge_{i_2}^{p_j}, \cdots), \\ & \qquad (i = 1, 2, \cdots, n!). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

が成立する．

これを置換定理ということにする．とくに$n=2$の場合，これはいわゆる双対定理

$$\overline{f(x_1, x_2, \cdots; \wedge, \vee)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots; \vee, \wedge). \qquad (25)$$

になり，したがって上の定理は一般多値双対定理とでもいうことができるであろう．式（25）において“－”，“∧”，“∨”はそれぞれ否定，論理積，論理和をあらわす．この置換定理により，論理定数，置換，および束演算に関する性質（恒等関係）の一つがあたえられると，これに同型の（双対の）性質[13][14]がすべて誘導されることになる．

5．多値論理関数の展開

集合Tの順序の一つを $r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$ とし，値 t_j を t_{i_n} に，t_k を t_{i_1} に変換する置換を $P_{j,k}$ とする．このとき

$$\bigwedge_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} {}_i \; x^{P_{j,k}} = \begin{cases} t_{i_1} & (x \neq t_j) \\ t_{i_n} & (x = t_j), \end{cases} \qquad (26)$$

である．このような関数は一致関数などといわれ，$\delta_j(x)$ とあらわされる．このとき，式（6）により任意の n 値 m 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ に対して

$$f(t_{j_1}, x_2, \cdots, x_m) \wedge_i \delta_{j_1}(x_1)$$
$$= \begin{cases} t_{i_1} & (x_1 \neq t_{j_1}), \\ f(t_{j_1}, x_2, \cdots, x_m), & (x_1 = t_{j_1}). \end{cases} \qquad (27)$$

がなりたつ．したがって，値 t_{i_1} を最後位とするTの順序の一つを $r_\ell = \langle \cdot, \cdot, \cdots, t_{i_1} \rangle$ とすると

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$
$$= \bigwedge_{j_1=1}^{n} {}_\ell \left\{ f(t_{j_1}, x_2, \cdots, x_m) \wedge_i \delta_{j_1}(x) \right\}. \qquad (28)$$

と展開することができる．さらに，各 $f(t_{j_1}, x_2, \cdots, x_m)$ を x_2 について展開して

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$
$$= \bigwedge_{j_1=1}^{n} {}_\ell \left[\left\{ \bigwedge_{j_2=1}^{n} {}_\ell \left(f(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, x_m) \wedge_i \delta_{j_2}(x_2) \right) \right\} \wedge_i \delta_{j_1}(x_1) \right]$$
$$= \bigwedge_{(j_1, j_2)=(1,1)}^{(n,n)} {}_\ell \left\{ f(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, x_m) \wedge_i \delta_{j_1}(x_1) \wedge_i \delta_{j_2}(x_2) \right\}.$$
$$(29)$$

とすることができる．ここに$\delta_{j_1}(x_1)$は値t_{i_1}かt_{i_n}のみしかとらないので，定理２系２．１により，任意の$\wedge_l$に対してこの$\delta_{j_1}(x_1)$を分配することができるのである．以下すべての変数について順次同様に展開してつぎの展開定理をえる．

定理５．任意のn値論理関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$は

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

$$= \bigwedge_{l\,(j_1, j_2, \cdots, j_m)=(1,1,\cdots,1)}^{(n,n,\cdots,n)} \Big\{ f(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_m})$$

$$\wedge_i \Big(\bigwedge_{i\,\substack{k_1=1\\k_1\neq j_1}}^{n} x_1^{P_{j_1,k_1}} \Big) \wedge_i \Big(\bigwedge_{i\,\substack{k_2=1\\k_2\neq j_2}}^{n} x_2^{P_{j_2,k_2}} \Big) \wedge_i \cdots \wedge_i \Big(\bigwedge_{i\,\substack{k_m=1\\k_m\neq j_m}}^{n} x_m^{P_{j_m,k_m}} \Big) \Big\}. \tag{30}$$

のように展開することができる．ただし，$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$とするとき，$r_l = \langle \cdot, \cdot, \cdots, t_{i_1} \rangle$である．

これは，$\bigwedge_{l\,(j_1, j_2, \cdots, j_m)=(1,1,\cdots,1)}^{(n,n,\cdots,n)}$が$T^m$のすべての要素についての$\wedge_l$による結合をあらわし，各項$\{\quad\}$がそれぞれ一つの要素$(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_m})$に対してのみ値$f(t_{j_1}, t_{j_2}, \cdots, t_{j_m})$をとり，他のすべての要素に対して値$t_{i_1}$をとることからも容易に認められ，いわゆる最大・最小項展開に属する．

展開式（３０）は項$\{\quad\}$をn^m個もち，この各項はそれぞれ項（　）をm個もち，この各項はそれぞれ$P_{j,k}$の形の置換を$n-1$個もつ．各置換$P_{j,k}$においてはt_iとt_k以外の値の変換は任意であるから，各$P_{j,k}$は一つの$\wedge_i$に対して$(n-2)!$

とおりに選ぶことができる．さらに，$\wedge_\ell$は一つの$\wedge_i$に対して（$n-1$）!とおりに選ぶことができ，しかも任意の$\wedge_i$を用いることができるから展開式（30）は

$$n!\,(n-1)!\,(n-2)!^{(n-1)m\,n^m} \qquad (31)$$

とおり存在する．とくに$n=2$の場合には，主加法，ならびに主乗法標準展開の2とおりになり，$n=3$の場合にもmに無関係で12とおりになる．また，f（t）$=t_{i_h}$，$h<n$である項$\{f(t)\wedge_i\cdots\}$に対しては，$r_{j,k}$はt_kをt_{i_1}に，t_jをt_{i_h}，$t_{i_{h+1}}$，…，t_{i_n}のどれかに変換するものでよい．また，f（x）が縮退関数[24]であってその値域がTの一部に限られる場合には，$f(x)\leq_\ell t_{i_1}$である任意の順序をr_ℓとして選ぶことができ，さらに多くの展開が可能である．

展開式（30）によると，任意のn値m変数論理関数が，m（$n-1$）$+1$変数入力の束演算$\wedge_i$をn^m個と，n^m変数入力の束演算$\wedge_\ell$を1個用いて構成される．各$\wedge_i$は，全変数をそれぞれ一つの一致関数に縮退させると同時にこれらの結合をおこなっている．それにしても展開式（30）をそのまま実現した論理回路は不経済である．

6．多値論理関数の簡単化

ここでは，展開式（３０）からより多くの文字（$x^{p_{i,k}}$）および項をのぞき，したがつて用いる束演算の数とその入力数をより少くすることを考える．

〔１〕（束演算の選択）．n値m変数関数$f(x)$はT^mの一つの部分集合をTの一つの値に対応させる．T^mのこのような部分集合の濃度のもつとも高いものが対応する値がt_{i_1}であり，つぎに濃度の高い部分集合が対応する値がt_{i_2}であるとし以下同様とする．展開式（３０）の$\wedge_i$として，Tの順序$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n} \rangle$で定義される束演算を用い，$\wedge_l$としては$\vee_i$を用いる．

$\wedge_i$の選択の範囲が限定されるようなことがあれば，上のt_{i_1}を許された束演算を定義する順序の最前位の値に，t_{i_2}をその才２位の値に，以下同様に順次変換する置換をその関数にほどこし，これを展開して簡単化し，その結果に上の逆置換をほどこせばよい．$\vee_i$についても，置換定理によりこれを許された任意の束演算に変換することができる．これは，２値論理関数$f(x)$において，$\overline{f(x)}$を加法（乗法）展開し，双対定理を適用することによつて$f(x)$の乗法（加法）展開をえるのと同じ原理である．

〔２〕（冗長項の除去）．展開式（３０）において，$f(t_j) = t_{i_1}$であれば，これを含む項$\{f(t_j) \wedge_i \cdots\}$を除く．

このような項は一定値 t_{i_1} をとるため，すべて他の項に吸収されるからである．手順［1］のように $\wedge_i$，$\vee_i$ を選ぶ理由はまずこの手順［2］で展開式（30）からもっとも多くの項が除外され，それだけ以下の操作が簡単になるからである．

［3］．一つの（j，k）に対して置換 $P_{j,k}$ は（$n-2$）!個あり，手順［2］で残された各項｛　｝にはこのような置換が（$n-1$）m 個あるから，これらの各項はそれぞれ（$n-2$）$!^{(n-1)m}$ とおりにあらわされる．これら等価であっても表現のことなる項はすべて列挙する．すなわち，列挙する項の数は手順2で残された項の数の（$n-2$）$!^{(n-1)m}$ 倍になる．

［4］（冗長文字の除去）．上に列挙したある項からいくつかの文字を除いたものを h（x）とするとき，この h（x）に対して関係 $h(x) \leqq_i f(x)$ が保たれる限りできるだけ多くの文字を除く．この操作を上に列挙したすべての項についてそれぞれおこなう．

このようにしてつくられる項を主項（prime implicant）ということにする．ここに，除く文字の順序によって一つの項から二つ以上の主項を生じることがある．

［5］（主項の選択）．McCluskey(23) の方法にしたがって主項表をつくり，これから必要最少限の主項を選択する．主項の2組以上が選択されるときには，文字数の合計がもっ

とも少い組をとる．最後にこれらの主項を$\vee_i$で結合する．

例．表2は一つの3値2変数論理関数の真理値表である．

表2．3値2変数関数の例

x	t_1	t_1	t_1	t_2	t_2	t_2	t_3	t_3	t_3
y	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3	t_1	t_2	t_3
f	t_2	t_3	t_2	t_1	t_1	t_1	t_2	t_1	t_3

3値の置換6個を

$$p_1=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{pmatrix},\quad p_2=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_1 & t_3 \end{pmatrix},\quad p_3=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_3 & t_2 \end{pmatrix},$$

$$p_4=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_2 & t_3 & t_1 \end{pmatrix},\quad p_5=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_1 & t_2 \end{pmatrix},\quad p_6=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_3 & t_2 & t_1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

とする．手順〔1〕により，r_iとして$r_1=\langle t_1,\ t_2,\ t_3\rangle$をとる．$n=3$のとき，一つの$(j,\ k)$に対して置換$p_{j,k}$はただ1個しかない．したがって，手順〔2〕，〔3〕により検討すべき項は

$$\begin{aligned}
&t_2\wedge_1 x^{p_5}\wedge_1 x^{p_6}\wedge_1 y^{p_5}\wedge_1 y^{p_6}, \qquad t_3\wedge_1 x^{p_5}\wedge_1 x^{p_6}\wedge_1 y^{p_3}\wedge_1 y^{p_4},\\
&t_2\wedge_1 x^{p_5}\wedge_1 x^{p_6}\wedge_1 y^{p_1}\wedge_1 y^{p_2}, \qquad t_2\wedge_1 x^{p_1}\wedge_1 x^{p_2}\wedge_1 y^{p_5}\wedge_1 y^{p_6},\\
&t_3\wedge_1 x^{p_1}\wedge_1 x^{p_2}\wedge_1 y^{p_1}\wedge_1 y^{p_2}.
\end{aligned} \tag{33}$$

の5項である．この第1項から，手順〔4〕によって2個の

主項　$t_2 \wedge_1 x^{P_5} \wedge_1 y^{P_5}$，$t_2 \wedge_1 x^{P_5} \wedge_1 x^{P_6}$　を生じる．これらを表3の主項表に識別記号A，B，…とともに記入する．ここでは簡単のためにその置換のみを示した．表上部の5個のベクトルは，$f(t_i, t_j) \neq t_1$である(t_i, t_j)のすべてである．各主項と各ベクトルの交点の記号“＊”は，そのベクトルに対してその主項が関数fに一致することを示す．

表3．主項表の例

	x	y	$(t_1 t_1)$	$(t_1 t_2)$	$(t_1 t_3)$	$(t_3 t_1)$	$(t_3 t_3)$
A	P_5	P_5	*		*	*	
B	P_5　P_6	−	*		*		
C	P_5　P_6	P_4	*	*			
D	P_5　P_6	P_3		*	*		
E	P_5	P_2	*		*	*	
F	P_2	P_5	*		*	*	
G	P_2	P_2	*		*	*	*

最後に主項の選択のためにこの主項表の論理式をつくると

$$(A \vee B \vee C \vee E \vee F \vee G) \wedge (C \vee D)$$
$$\wedge (A \vee B \vee D \vee E \vee F \vee G) \wedge (A \vee E \vee F \vee G) \wedge G$$
$$= (C \vee D) \wedge G$$
$$= (C \wedge G) \vee (D \wedge G) . \qquad (34)$$

となる．したがって，必要最少限の主項は（C，G）および

（D，G）の２組ある．どちらをとっても文字数は同じである．以上から，この３値論理関数が

$$f(x, y) = (x^{p_5} \wedge_1 x^{p_6} \wedge_1 y^{p_4}) \vee_1 (x^{p_2} \wedge_1 y^{p_2})$$
$$= (x^{p_5} \wedge_1 x^{p_6} \wedge_1 y^{p_3}) \vee_1 (x^{p_2} \wedge_1 y^{p_2}). \qquad (35)$$

のように構成されることになる．

組み合せ禁止条件がある場合には，このようなベクトル $\mathbf{t}_d$ に対して，$f(\mathbf{t}_d) = d$ という値 d を仮定し，$r_i = \langle t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots, t_{i_n}, d \rangle$，$r_l = \langle d, t_{i_n}, \cdots, t_{i_2}, t_{i_1} \rangle$ と考えて主項をつくり，主項表ではすべての $\mathbf{t}_d$ を無視すればよい．

また，第５節でのべたように，他に多くの標準項のつくりかたがあり，したがって他に多くの主項のつくりかたがある．このような主項を用いることによって，多値論理関数のさらに簡単な構成をえることがある．しかし，このような方法をすべて試みるにはいちじるしい手数を要する．しかもその効果はあきらかでない．

７．むすび

ここに，多値論理における置換と束演算の重要な諸性質を示し，これらによる多値論理回路の一設計法についてのべた．すでに，置換，および論理積や論理和を用いた多値論理系

はよく知られているが，ここでは $n!$ 個のすべての置換と，真理値の可能なすべての順序から定義される $n!$ のすべての束演算を導入して，これまでの多値論理系における論理積と論理和の背景をあきらかにした．とくに；ここにみちびいた置換定理は置換と束演算の本質的な重要な関係を示している

また，多値論理系はいたって多数存在し，多数の系が発表されているが，ここに示した系は，とくに n 値を n 線上の信号の有無であらわす多線回路方式によく適合し，もっとも実際的な多値論理系の一つである．

ここでは，束演算の２段以下の構成に限って多値論理関数の簡単化の一般的な方法を示したが，関数によってはかならずしも最簡構成がえられるとは限らない．とくに多値多変数の論理関数では，とりあつかう標準項，主項ともにいちじるしく多くなり，実際問題として自動計算機を使用することが要求されるであろう．その他，束演算の多段構成，分岐数や集合数の制限，多くの関数の同時構成など，なお残された問題である．

謝辞．御指導、御支援いただいた京都大学の三根教授，長谷川助教授，茨木氏，高岡氏，ならびに徳島大学の原田教授に深く感謝する．

文　献

(1) E. L. Post : "Introduction to a general theory of elementary propositions", Am. J. Math., XLIII, (1921)

(2) 伊藤誠 : "n値関数束（n値論理）について", 九大工学集報, 28, 2 (1955)

(3) R. Vacca : "A three valued system of logic and its applications to base three digital circuits", UNESCO/NS/ICIP/G. 2. 14

(4) 古賀義亮 : "置換演算子による多変数論理関数の展開", 信学オートマトン・自動制御研資（昭38－11）

(5) D. L. Webb : "Generation of any n-valued logic by one binary operation", Proc. Nat. Acad. Sci., 21 (1935)

(6) N. M. Martin : "The Sheffer functions of 3-valued logic", J. Sym. Logic, 19, 1 (March 1954)

(7) 田中，田原 : "三値Polypheck", 信学電子計算機研資, EC 69－1 (1964－04)

(8) W. H. Hanson : "Ternary threshold logic", IEEE Trans. EC－12, 3 (June 1963)

(9) V. Varshavsky, B. Ovsievich: "Networks composed of ternary majority elements", IEEE Trans. EC-14, 5 (Oct. 1965)

(10) J. Santos, H. Arango, F. Lorenzo: "Threshold synthesis of ternary digital systems", IEEE Trans. EC-15, 1 (Feb. 1966)

(11) 北橋, 野村, 手塚, 笠原: "三値論理関数の特徴パラメータとしきい値関数への応用", 信学論文誌, 52-C, 10 (昭44-10)

(12) 後藤以紀: "多元論理代数方程式の一般解について", 電試彙, 20, 2 (昭31-02)

(13) Y. A. Keir: "Algebraic properties of 3-valued compositions", IEEE Trans. EC-13, 5 (Oct. 1964)

(14) 三根, 古賀: "準自己同型対応をなす3値多変数論理関数", 信学誌, 50, 5 (昭42-05)

(15) 原田, 島田, 為貞: "三線式三値論理回路について", 信学論文誌, 52-C, 1 (昭44-01)

(16) J. von Neumann: "Probabilistic logic and the synthesis of reliable organisms from unreliable components", Automata Studies, Prinston Univ.

Press, (1956)

(17) 東大超高速計算機研究会："江崎ダイオードによる超高速計算機の可能性について"，信学電子計算機研資(昭34-10)

(18) 三根，長谷川，古賀，池田："三値論理回路の一実現法について"，信学全大67(昭40)

(19) 原田，島田(稔)："位置による3値論理回路の1例について"，電四学連大373(昭36)

(20) R. F. Sechler, A. R. Strube, J. R. Turnbull："ASLT Circuit Design"，IBM. Journal, 11, 1 (Jan. 1967)

(21) M. Yoeli, G. Rosenfeld："Logical design of ternary switching circuits"，IEEE Trans. EC-14, 1 (Feb. 1965)

(22) D. D. Givone, R. W. Snelsire："The design of multiple-valued logic systems"，Dep. Elect. Engng, State Univ. N. Y. Buffalo, Final Rep. (June 1968)

(23) E. J. McCluskey："Minimization of Boolean functions"，BSTJ, XXXV, 6 (Nov. 1956)

（２４）三根，古賀，徳山：“多値１変数関数の基礎理論”，信学インホメーション理論研資（昭４０－０１）